ПОПЕРЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОДВЕШЕННОЙ НИТИ В СЛУЧАЕ, КОГДА ТОЧКА ПОДВЕСА ДВИЖЕТСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО ПО ЗАДАННОМУ ЗАКОНУ

Обухов А. Н., Паламарчук В. А.

Поставлена и решена задача о поперечных перемещениях весомой нити произвольного сечения в случае, когда верхний конец перемещается горизонтально по закону $f(t)$. Получены решения для трех различных способов перемещения верхнего конца нити: $f(t) = V_0 t$, $f(t) = \Delta \sin \omega t$, $f(t) = \Delta\left(1 - e^{-\beta t}\right)^2$. Исследовано явление резонанса в случае, когда частота перемещения верхнего конца нити ω совпадает с k_1-гармоникой свободных колебаний нити, найдена резонансная амплитуда роста k_1-гармоники. Установлено, что в рассмотренных случаях относительные перемещения произвольного сечения нити носят незатухающий колебательный характер. Показано, что ряды в полученных решениях сходятся достаточно быстро, и для практического использования полученных результатов можно ограничиться двумя первыми членами ряда.

Поставлена і розв’язана задача про поперечні переміщення довільного перерізу вагомої нитки у разі, коли верхній кінець переміщується горизонтально за законом $f(t)$. Одержано розв’язок для трьох різних способів переміщення верхнього кінця нитки: $f(t) = V_0 t$, $f(t) = \Delta \sin \omega t$, $f(t) = \Delta\left(1 - e^{-\beta t}\right)^2$. Досліджено явище резонансу у випадку, коли частота переміщення верхнього кінця нитки ω співпадає з k_1-гармонікою вільних коливань нитки, знайдена резонансна амплітуда зростання k_1-гармоніки. Встановлено, що у розглянутих випадках відносні переміщення довільного перерізу нитки носять характер незатухаючих коливань. Показано, що ряди в отриманих розв’язках збігаються досить швидко, і для практичного використання отриманих результатів можна

Problem of the transverse displacements of the ponderable unspecified sectional view fiber, wherein the upper end moving horizontally by $f(t)$ law, was set and solved. The solutions were obtained for the three different ways of moving of the upper end: $f(t) = V_0 t$, $f(t) = \Delta \sin \omega t$, $f(t) = \Delta\left(1 - e^{-\beta t}\right)^2$. Phenomenon of resonance in the case when the frequency of ω movement of the upper end coincides with the free oscillations k_1-harmonica was investigated. Resonance of the amplitude of the growth k_1-harmonics was found. It is established that the considered cases the relative movement of unspecified sectional view fiber have a continuous oscillatory nature. It is shown that the series of obtained solutions converge quite rapidly, and the obtained results can be limited to the first two terms of series in the case of practical using.

Обухов А. Н. — канд. техн. наук, доц. ДГМА, vm@dgma.donetsk.ua

Паламарчук В. А. — канд. техн. наук, доц. ДГМА

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск.

УДК 531.396, 534.011

Обухов А. Н., Паламарчук В. А.

ПОПЕРЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОДВЕШЕННОЙ НИТИ В СЛУЧАЕ, КОГДА ТОЧКА ПОДВЕСА ДВИЖЕТСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО ПО ЗАДАННОМУ ЗАКОНУ

Бурное развитие техники и технологии сделало актуальными задачи, относимые ранее к области фантастики, например, проблему «космического лифта» [1, 2]. Исследования в этой области потребовали решения соответствующих инженерных задач [3, 4]. Все эти задачи восходят к известной задаче Д. Бернулли [5] о колебаниях тяжелой нити с фиксированным закреплением одного конца.

Целью работы является решение задачи Д. Бернулли в случае, когда точка подвеса нити движется горизонтально по заданному закону.

Рассмотрим тяжелую однородную нить длины l. Нить закреплена верхним концом в точке $x = l$ и совершает колебания под действием силы тяжести. За ось x примем вертикальное направление, вдоль которого расположена нить, когда под действием своего веса она займет прямолинейное положение. Обозначим через $U(x,t)$ положение точек нити от положения равновесия в момент времени t (рис. 1).

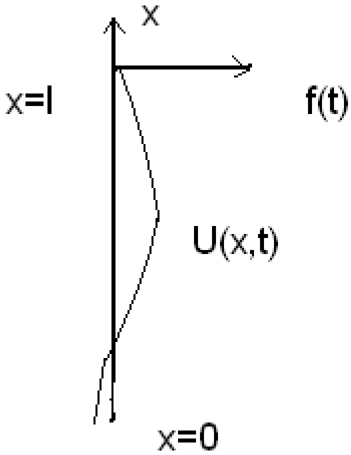

Рис. 1. Расчетная схема

Перемещения произвольного сечения нити, точка подвеса которой $x = l$ движется горизонтально по закону $f(t)$ можно найти как решение дифференциального уравнения [5]:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho g x \frac{\partial U}{\partial x}\right), \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным:

$$U(x,t)\big|_{x=l} = f(t), \; U(x,t)\big|_{x=0} < \infty \tag{2}$$

и начальным условиям:

$$U(x,t)\big|_{t=0} = 0, \; \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Здесь: ρ – плотность материала; g – ускорение свободного падения, l – длина; $U(x,t)$ – горизонтальное перемещение произвольного сечения нити.

Решать поставленную задачу будем операционным методом. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1) по переменной t, с учетом начальных и граничных условий, получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\overline{U}(x,p)}{dx}\right)=\left(\frac{p}{\sqrt{g}}\right)^2\overline{U}(x,p), \tag{4}$$

решение которого удовлетворяет краевым условиям:

$$\overline{U}(x,p)\Big|_{x=l}=\overline{F}(p),\quad \overline{U}(x,p)\Big|_{x=0}<\infty\,. \tag{5}$$

Здесь

$$\overline{U}(x,p)=\int_0^\infty U(x,t)e^{-pt}dt,\quad \overline{F}(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \tag{6}$$

Найдем общее решение уравнения (5), вводя новую переменную ξ, положив $\xi=\sqrt{x}$. Дифференциальное уравнение можно записать в виде:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\overline{U}}{d\xi}\right)-\left(\frac{2p}{\sqrt{g}}\right)^2\xi\overline{U}=0\,. \tag{7}$$

Общее решение уравнения (7) можно записать в виде линейной комбинации:

$$\overline{U}(\xi,p)=C_1J_0\left(i\cdot 2\frac{p}{\sqrt{g}}\xi\right)+C_2Y_0\left(i\cdot 2\frac{p}{\sqrt{g}}\xi\right). \tag{8}$$

Здесь $J_0(z), Y_0(z)$ – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, $i=\sqrt{-1}$.

Перейдем в равенстве (8) к старой переменной:

$$\overline{U}(x,p)=C_1J_0\left(i\cdot 2\frac{p\sqrt{l}}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)+C_2Y_0\left(i\cdot 2\frac{p\sqrt{l}}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \tag{8'}$$

Так как при $x\to 0,\quad Y_0(x)\to\infty$, то, учитывая краевые условия (5), найдем:

$$C_2=0,\quad C_1=\frac{\overline{F}(p)}{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}. \tag{9}$$

Окончательно, решение краевой задачи или изображение поперечного перемещения произвольного сечения нити можно записать формулой:

$$\overline{U}(x,p)=\overline{F}(p)\frac{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}\,. \tag{10}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, искомое решение поставленной задачи можно записать в виде:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\overline{F}(p)\frac{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}e^{pt}dp,\quad t>0\,. \tag{11}$$

Функция $\overline{U}(x,p)$ аналитическая, кроме полюсов $\overline{F}(p)$ и корней выражения:

$$J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)=0. \tag{12}$$

Найдем корни уравнения (12). Полагая $\mu=i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p$ получим:

$$J_0(\mu)=0. \tag{13}$$

Согласно [6] это уравнение имеет счетное множество корней:

$$\mu_1<\mu_2<\mu_3<...<\mu_k<...., \quad k=1,2,3,....n,....,$$

симметричных относительно нуля.

Каждому корню μ_k отвечают корни уравнения (12):

$$p_k=\pm i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}, \quad k=1,2,3,....n,... \tag{14}$$

Заметим, что эти корни однократные.

Используя теорию вычетов, интеграл (11) можно записать в виде:

$$U(x,t)=\sum_{p_i}\operatorname*{Res}_{p_i}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right). \tag{15}$$

Здесь p_i – полюсы $\overline{F}(p)$ и корни уравнения (12);

$$\operatorname*{Res}_{p_i}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to p_i}\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left(\overline{U}(x,p)(p-p_i)^r e^{pt}\right), \tag{16}$$

где r – кратность корня p_i.

Перемещение произвольного сечения нити при горизонтальном перемещении ее верхнего конца по закону $f(t)$ можно найти, используя выражение:

$$U(x,t)=\sum_{p_i}\operatorname*{Res}_{p_i}\left(\overline{F}(p)\frac{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}e^{pt}\right). \tag{17}$$

Рассмотрим частные случаи перемещения верхнего конца нити:

а) Пусть верхний конец нити движется горизонтально с постоянной скоростью V_0. Тогда закон движения принимаем в виде:

$$f(t)=V_0t \tag{18}$$

и

$$\overline{F}(p)=V_0\frac{1}{p^2} \tag{19}$$

Полюс $\overline{F}(p)$ $p=0$ имеет кратность r=2.

Найдем вычеты выражения:

$$\overline{U}(x,p)=\frac{V_0J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{p^2J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{x}{g}}p\right)}.$$

1) $p=0$.

$$\operatorname*{Res}_{p=0} s\frac{V_0 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{p^2 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}e^{pt}=\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left(\frac{V_0 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{p^2 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}e^{pt}\right)=V_0 t. \qquad (20)$$

2) $p_k=i\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}$ $\qquad k=1,2,3,\ldots\ldots$

$$Z=\operatorname*{Res}_{p=i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}} s\frac{V_0 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{p^2 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}e^{pt}=\lim_{p\to i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}}\left(\frac{V_0 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{p^2\frac{d}{dp}\left(J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)\right)}e^{pt}\right). \qquad (21)$$

Учитывая, что

$$J_0{}'_p\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)=J_0{}'_p\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)\cdot 2i\sqrt{\frac{l}{g}}=-J_1\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)\cdot 2i\sqrt{\frac{l}{g}};$$

Тогда при $p=i\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}$:

$$J_0'\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)=-J_1(-\mu_k)i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}=J_1(\mu_k)i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (22)$$

выражение (21) примет вид

$$Z=-\frac{V_0}{\frac{g}{l}\frac{\mu_k^2}{4}}\frac{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{2i\sqrt{\frac{l}{g}}I_1(\mu_k)}e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t}=\frac{2V_0\sqrt{\frac{l}{g}}}{\mu_k^2}\frac{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_1(\mu_k)}\left(-\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t+i\cos i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t\right). \qquad (23)$$

Так как

$$\operatorname*{Res}_{p=i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}} s\overline{U}e^{pt}+\operatorname*{Res}_{p=-i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}} s\overline{U}e^{pt}=2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Res}_{p=i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}} s\overline{U}e^{pt}\right),$$

то

$$2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Res}_{p=i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}} s\overline{U}e^{pt}\right)=-4V_0\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \qquad (24)$$

Поперечное перемещение произвольного сечения нити (17) в случае $f(t)=V_0 t$ с учетом равенств (20) и (24) можно записать в виде:

$$U(x,t)=V_0 t-4V_0\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\omega_k t}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right). \qquad (25)$$

Здесь $\omega_k=\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}$;

$J_1(\mu_k)$ – значение функции Бесселя первого рода первого порядка от аргумента μ_k.

Анализируя полученное решение, можно утверждать, что произвольное сечение нити совершает сложное движение, состоящее из переносного (первое слагаемое) поступательного перемещения точек нити с постоянной скоростью V_0 и относительного колебательного движения относительно равновесного положения нити.

Учитывая начальное условие $\left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ и выражение (25), можно получить разложение единичной функции в ряд по системе функций $J_0\left(\mu_k\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)$, $k = 1,2,3.....$ в виде:

$$1 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{\mu_k I_1(\mu_k)}, \quad x \in (0;l). \tag{26}$$

б) Пусть $f(t) = \Delta\sin\omega t$, тогда:

$$\overline{F}(p) = \frac{\Delta\omega}{p^2+\omega^2}. \tag{27}$$

Полюсы $\overline{F}(p)$ однократные $p_k = \pm i\omega$.

Найдем вычеты выражения (10) в полюсах:

1) $p = i\omega$.

$$\lim_{p\to i\omega}\operatorname*{Res}_{p=i\omega} s\frac{\Delta\omega}{p^2+\omega^2}\frac{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}e^{pt} = \lim_{p\to i\omega}\frac{\Delta\omega}{p+i\omega}\frac{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}e^{pt} =$$

$$= -i\frac{\Delta}{2}\frac{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\right)}(\cos\omega t + i\sin\omega t) = \frac{\Delta}{2}\frac{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\right)}(\sin\omega t - i\cos\omega t). \tag{28}$$

Найдем

$$\operatorname*{Res}_{p=i\omega} s\overline{U}e^{pt} + \operatorname*{Res}_{p=-i\omega} s\overline{U}e^{pt} = 2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Res}_{p=i\omega} s\overline{U}e^{pt}\right) = \Delta\frac{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\right)}(\sin\omega t). \tag{29}$$

2) $p_k = i\cdot\sqrt{\dfrac{g}{l}}\dfrac{\mu_k}{2} \qquad k = 1,2,3,.......$

$$\operatorname*{Res}_{p=i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}} s\frac{\Delta\omega}{p^2+\omega^2}\frac{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}e^{pt} = \lim_{p\to i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}}\frac{\Delta\omega}{p^2+\omega^2}\frac{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{\frac{d}{dp}\left(J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)\right)}e^{pt} =$$

$$= -\frac{\Delta\omega}{\left(\omega^2 - \frac{g}{l}\frac{\mu_k^2}{4}\right)} \frac{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{2\sqrt{\frac{l}{g}}J_1(\mu_k)}\left(-\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t\right) + i\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t\right)\right); \tag{30}$$

$$\operatorname*{Re}_{p=i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}} s\overline{U}e^{pt} + \operatorname*{Re}_{p=-i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}} s\overline{U}e^{pt} = 2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Re}_{p=i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}} s\overline{U}e^{pt}\right) = -4\Delta\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\frac{\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t\right)}{\left(\mu_k^2 - 4\frac{l\omega^2}{g}\right)J_1(\mu_K)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \tag{31}$$

Тогда поперечное перемещение произвольного сечения нити (17) в рассмотренном случае, согласно выражениям (29) и (31) можно записать в виде:

$$U(x,t) = \Delta\frac{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\right)}(\sin\omega t) - 4\Delta\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t\right)}{\left(\mu_k^2 - 4\frac{l\omega^2}{g}\right)J_1(\mu_K)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right) \tag{32}$$

Согласно выражению (32), произвольное сечение нити участвует в двух движениях, первое слагаемое – переносное движение, носит характер гармонического колебания с частотой ω и амплитудой А, зависящей от сечения x:

$$A = \Delta\frac{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\right)}, \tag{33}$$

Второе слагаемое – относительное колебательное движение, представляющее собой сумму бесконечного числа гармоник собственных форм свободных колебаний подвешенной нити.

Заметим, что когда частота перемещения верхнего конца нити ω приближается к одной из частот собственных колебаний нити, то будет наблюдаться явление резонанса.

в) Пусть $f(t) = \Delta\left(1 - e^{-\beta t}\right)^2$. (34)

График $f(t)$ представлен на рис. 2.

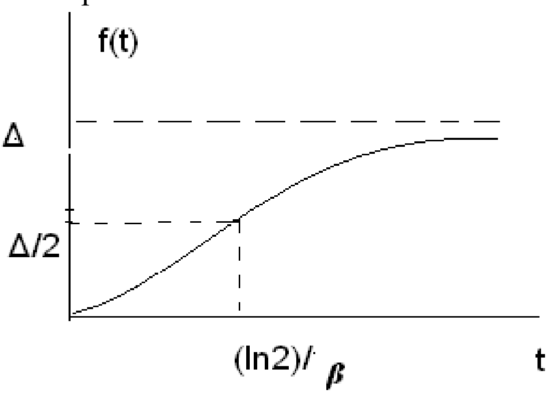

Рис. 2. График функции (34)

Изображение функции (34) запишем в виде:

$$\overline{F}(p)=\frac{2\beta^2\Delta}{p(p+\beta)(p+2\beta)}, \tag{35}$$

тогда выражение (10) примет вид:

$$U(x,p)=\frac{2\Delta\beta^2}{p(p+\beta)(p+2\beta)}\frac{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}. \tag{36}$$

Полюсы выражения (36) однократны и их значения:

$$p=0;\quad p=-\beta;\quad p=-2\beta;\quad p_k=\pm i\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2},\qquad k=1,2,3.....n.$$

Вычислим значения выражения (39) в полюсах:

1) $p=0$:

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\overline{U}(x,p)e^{pt}=\lim_{p\to 0}\frac{2\Delta\beta^2 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{(p+\beta)(p+2\beta)J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}e^{pt}=1. \tag{37}$$

2) $p=-\beta$:

$$\operatorname*{Res}_{p=-\beta}\overline{U}(x,p)e^{pt}=\lim_{p\to -\beta}\frac{2\Delta\beta^2 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{(p+2\beta)\cdot p\cdot J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}e^{pt}=-2\Delta\frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{l\beta^2}{g}}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{l\beta^2}{g}}\right)}e^{-\beta t}. \tag{38}$$

Здесь $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

3) $p=-2\beta$:

$$\operatorname*{Res}_{p=-2\beta}\overline{U}(x,p)e^{pt}=\lim_{p\to -2\beta}\frac{2\Delta\beta^2 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{(p+\beta)\cdot p\cdot J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)}e^{pt}=\Delta\frac{I_0\left(4\sqrt{\frac{l\beta^2}{g}}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0\left(4\sqrt{\frac{l\beta^2}{g}}\right)}e^{-2\beta t}. \tag{39}$$

4) $p_k=i\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}\qquad k=1,2,3,.......$:

$$\operatorname*{Res}_{p=-2i\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}}\overline{U}(x,p)e^{pt}=\lim_{p\to -2i\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}}\frac{2\Delta\beta^2 J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{(p+\beta)(p+2\beta)\cdot p\cdot\frac{d}{dp}\left(J_0\left(i\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}p\right)\right)}e^{pt}. \tag{40}$$

После несложных алгебраических преобразований (40) можно записать в виде:

$$\operatorname*{Re}_{p=-2i\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}} s\ \overline{U}(x,p)e^{pt} = -2\Delta\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t-\psi_k\right)+i\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t-\psi_k\right)}{\mu_k J_1(\mu_k)\sqrt{\left(1+\frac{g}{l\beta^2}\frac{\mu_k^2}{4}\right)\left(4+\frac{g}{l\beta^2}\frac{\mu_k^2}{4}\right)^2}}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right), \tag{41}$$

тогда

$$2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Re}_{p=-2i\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}} s\ \overline{U}(x,p)e^{pt}\right) = -4\Delta\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t-\psi_k\right)}{\mu_k J_1(\mu_k)\sqrt{\left(1+\frac{g}{l\beta^2}\frac{\mu_k^2}{4}\right)^2\left(4+\frac{g}{l\beta^2}\frac{\mu_k^2}{4}\right)^2}}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right) \tag{42}$$

здесь

$$\psi_k = arctg\sqrt{\frac{g}{l\beta^2}}\frac{\mu_k}{2} + arctg\sqrt{\frac{g}{l\beta^2}}\frac{\mu_k}{4}, \qquad k = 1,2,3.....n,. \tag{43}$$

Учитывая выражения (37), (38), (39) и (42) равенство (18) – перемещение произвольного сечения нити – можно записать в виде:

$$U(x,t) = \Delta\left(1-2\frac{I_0\left(\eta\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(\eta)}e^{-\beta t} + \frac{I_0\left(2\eta\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(2\eta)}e^{-2\beta t}\right) -$$

$$-4\Delta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t-\psi_k\right)}{\mu_k J_1(\mu_k)\sqrt{\left(1+\frac{\mu_k^2}{\eta}\right)^2\left(4+\frac{\mu_k^2}{\eta}\right)^2}}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \tag{44}$$

Здесь $\eta = 2\sqrt{\frac{l\beta^2}{g}}$.

Переходя к пределу в равенстве (44) при $\beta \to \infty$ (что отвечает случаю мгновенного перемещения верхнего конца нити на величину Δ) получим искомое решение в виде выражения:

$$U(x,t) = \Delta\left(1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t\right)}{\mu_k J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right) \tag{45}$$

Анализ равенства (45) показывает, что переносное движение нити устанавливается с течением времени, т. е. вся нить перемещается на величину Δ, а относительное движение – колебание точек нити относительно нового положения равновесия.

Используя равенства (32), (44), и учитывая начальные условия (3), получим разложение функций в функциональные ряды по системе функций Бесселя $\left\{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right\}$ на интервале $x\in(0,l)$, где μ_k – корни уравнения $J_0(\mu_k)=0$. Эти разложения имеют вид:

$$1-2\frac{I_0\left(\eta\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(\eta)}+\frac{I_0\left(2\eta\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(2\eta)}=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\psi_k}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\mu_k}{\eta}\right)^2\right)\left(4+\left(\frac{\mu_k}{\eta}\right)^2\right)}\mu_л J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right) \tag{46}$$

$$\frac{I_0\left(\eta\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(\eta)}-\frac{I_0\left(2\eta\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0(2\eta)}=\frac{2}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\psi_k}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\mu_k}{\eta}\right)^2\right)\left(4+\left(\frac{\mu_k}{\eta}\right)^2\right)}J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right) \tag{47}$$

$$\frac{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\right)}=1+8\frac{l\omega^2}{g}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{\left(\mu_k^2-\frac{4l\omega^2}{g}\right)\mu_k J_1(\mu_k)},\qquad x\in(0,l) \tag{48}$$

Заметим, что полученные функциональные ряды (46)–(48) равномерно сходятся к соответствующим функциям на интервале $x\in(0,l)$.

Ранее было замечено, что если ω приближается к одной из частот собственных колебаний нити, то будет наблюдаться явление резонанса. Исследуем это явление. Используя равенство (48), выражение (32) можно переписать в виде:

$$U(x,t)=\Delta\left(\sin\omega t+8\frac{l\omega}{g}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega t-\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\mu_k}{2}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t}{\left(\mu_k^2-4\frac{l\omega^2}{g}\right)\mu_k J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right) \tag{49}$$

Пусть $\mu_{k_1}=2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}$, то есть резонанс реализуется на k_1 собственной частоте. Найдем, как изменяется амплитуда резонансной гармоники. Для этого вычислим предел:

$$\lim_{\mu_{k_1}\to 2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}}\frac{\omega\sin\omega t-\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\mu_{k_1}}{2}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_{k_1}}{2}t}{\left(\mu_{k_1}^2-4\frac{l\omega^2}{g}\right)\mu_{k_1}J_1(\mu_{k_1})}=-\frac{1}{16}\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)^2}\frac{\omega t\cos\omega t+\sin\omega t}{\omega^2 J_1\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\right)} \tag{50}$$

Окончательно, выражение (49) с учетом (50) перепишем в виде:

$$U(x,t)=\Delta\left(\sin\omega t-\frac{1}{2}\Delta\sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)^3}\frac{\omega t\cos\omega t+\sin\omega t}{\omega^2 J_1\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\right)}J_0\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right)+$$

$$+8\cdot\Delta\frac{l\omega}{g}\sum_{k\neq k_1}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega t-\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\mu_k}{2}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\mu_k}{2}t}{\left(\mu_k^2-4\frac{l\omega^2}{g}\right)\mu_k J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right) \tag{51}$$

Анализируя полученный результат, можно утверждать, что амплитуда резонансной гармоники k_1 возрастает, изменяясь по закону:

$$A_{k_1}=\frac{1}{2}\frac{g}{l\omega^2}\frac{\sqrt{1+(\omega t)^2}}{J_1\left(2\sqrt{\frac{l\omega^2}{g}}\right)} \tag{52}$$

То есть реализуется интенсивные горизонтальные перемещения, связанные с k_1 – формой свободных колебаний нити.

ВЫВОДЫ

В данной работе поставлена и решена задача о поперечных перемещениях произвольного сечения весомой нити в случае, когда верхний конец перемещается горизонтально по закону $f(t)$.

Получены решения для трех различных способов перемещения верхнего конца нити. Исследовано явление резонанса в случае, когда частота перемещения верхнего конца нити ω совпадает с k_1-гармоникой свободных колебаний нити, найдена резонансная амплитуда роста k_1-гармоники.

В рассмотренных случаях относительные перемещения произвольного сечения нити носят незатухающий колебательный характер, последнее объясняется тем, что в поставленной задаче не учитывалось рассеивание энергии.

Следует заметить, что ряды в полученных решениях сходятся достаточно быстро, и для практического их использования можно ограничиться двумя первыми членами ряда.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Space Elevator History. URL://www.star.tech-inc.com/id4.html.*

2. *Поляков Г. Г. Привязные спутники, космические лифты и кольца / Г. Г. Поляков – Астрахань : изд. АПУ, 1999. – 234 с.*

3. *Williams P. Dynamic Multibody Modeling for Tethered Space Elevators / P. Williams. – Acta Astronautica, 2009, Vol 95 – P. 399–422.*

4. *Садов Ю. А. Нелинейные поперечные колебания троса космического лифта, т. 23 / Ю. А. Садов, А. Б. Нуралиева – Математическое моделирование – 2011. – № 12. – С. 3–19.*

5. *Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.*

6. *Араманович И. Г. Уравнения математической физики : монография / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 188 с.*

Статья поступила в редакцию 28.03.2014 г.